b)* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3e^x-1}{e^x+1} = -1$

$* \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3e^x-1}{e^x+1} =$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(3-\frac{1}{e^x})}{e^x(1+\frac{1}{e^x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(3-\frac{1}{e^x})}{(1+\frac{1}{e^x})} = 3$$

Interprétation graphique :

Les droites d'équations respectives $y=-1$ et $y=3$ Sont des asymptotes à (ξ)

c) $f'(x) = \dfrac{4e^x}{(e^x+1)^2} > 0$

Donc f est strictement croissante sur IR

2) a/ $f'(0) = 1$, $f(0) = 1$

D'où $\Delta : y = x+1$

b) $g(x) = f(x) - (x+1)$

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{4e^x}{(e^x+1)^2} - 1$$

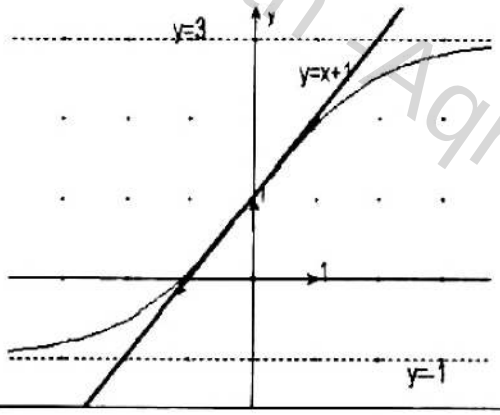
$$= \frac{4e^x-(e^x+1)^2}{(e^x+1)^2} =$$

$$\frac{-(e^{2x}-2e^x+1)}{(e^x+1)^2} = -(\frac{e^x-1}{e^x+1^2})^2$$

c) g est strictement décroissante sur IR et g(0)=0

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g (x)	+		−
Position relative	ξ_f au dessus de Δ		Δ au dessus de ξ_f

A(1,0)



Partie B I=[2 ;3]

1) a) $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$

$\Leftrightarrow f(x) - (x+1) = -1 \Leftrightarrow g(x) = -1$

b) $g'(x) < 0$; $\lim g = -\infty$ et ; $\lim g = +\infty$
$+\infty$ $-\infty$

g est continue est strictement décroissante sur IR donc g réalise une bijection de IR sur IR

Comme $-1 \in g(IR)$ alors il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = -1$

$g(\alpha) = -1 \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha$

D'ou α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans IR

et par suite $\xi \cap D = \{B(\alpha,\alpha)\}$

$(g(2)+1)(g(3)+1) < 0$

$\Rightarrow 2<\alpha<3$

2) $|f(x) - f(x')| \le \frac{1}{2}.|x - x'|$, $\forall x, x' \in I$

Comme on a : $\alpha \in I$ on aura :

$$|f(x) - f(\alpha)| \le \frac{1}{2}.|x - \alpha| ; \forall x \in I$$

3) $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = f(U_n) \ . \ n \in IN \end{cases}$

$U_n \in I$ (donnée)

a) d'après 2)

$$|f(U_n) - f(\alpha)| \le \frac{1}{2}.|U_n - \alpha|$$

$$\Rightarrow |U_{n+1} - \alpha| \le \frac{1}{2}.|U_n - \alpha|$$

Montrons par récurrence que :

$$|U_n - \alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n.|3 - \alpha|$$

*pour n=0

$$|U_0 - \alpha| = |3 - \alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^0 |3 - \alpha|$$

Donc la propriété est vraie pour n=0

* Supposons que $|U_n - \alpha| \le \frac{1}{2^n}.|3 - \alpha|$

et Montrons que : $|U_{n+1} - \alpha| \le \frac{1}{2^{n+1}}.|3 - \alpha|$

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn